Considerar una señal periódica (con periodo T=10ms) de la cual se conoce que contiene 6 armónicos dentro del ancho de banda con valores:

$c_0=5$; $c_1=3+3j$; $c_2= 2-j$; $c_3=0.5+1j$; $c_4=0.2-0.2j$; $c_5=0.3j$; $c_6=0.05$

Contestar los dos apartados siguientes:

a) Esta señal se hace pasar por un medio de transmisión que tiene la siguiente función de transferencia

$$H(f)=\begin{cases}(1-f/600)e^{-j0.02\pi f} & si\,|f|\leq 600Hz\\ 0 & si\,|f|>600Hz\end{cases}$$

- Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la señal después de pasar por el sistema.
- Determinar la señal resultante en el domino del tiempo
- ¿Qué tipos de distorsiones se producen? Justificar la respuesta

- Lo primero es ponerlo en función de ω y para ello usamos las equivalencias:

$$\omega_n = 2\pi n/T \qquad \text{y} \qquad \omega = 2\pi f$$

- $\omega_0 = 0$, $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 0Hz$
- $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0.01} = 100Hz$
- $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T}2$, $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T}2 = \dfrac{2}{T} = \dfrac{2}{0.01} = 200Hz$
- $\omega_3 = \dfrac{2\pi}{T}3$, $f_3 = \dfrac{\omega_3}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T}3 = \dfrac{3}{T} = \dfrac{3}{0.01} = 300Hz$
- $\omega_4 = \dfrac{2\pi}{T}4$, $f_4 = \dfrac{\omega_4}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T}4 = \dfrac{4}{T} = \dfrac{4}{0.01} = 400Hz$
- $\omega_5 = \dfrac{2\pi}{T}5$, $f_5 = \dfrac{\omega_5}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T}5 = \dfrac{5}{T} = \dfrac{5}{0.01} = 500Hz$
- $\omega_6 = \dfrac{2\pi}{T}6$, $f_6 = \dfrac{\omega_6}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi T}6 = \dfrac{6}{T} = \dfrac{6}{0.01} = 600Hz$

- Una vez hecho esto, vamos a ver cuánto valen los coeficientes después de pasar la señal por el sistema:

- $H(0) = \left(1-\dfrac{0}{600}\right)e^{0} = 1$, $C_0' = C_0 H(0) = 5$
- $H(100) = \left(1-\dfrac{100}{600}\right)e^{-j0.02\pi 100} = \dfrac{5}{6}e^{-j2\pi}$, $C_1' = C_1 H(100) = C_1\dfrac{5}{6}e^{-j2\pi} =$

$$= \frac{5}{6} C_1 (\cos(-2\pi) + jsen(-2\pi)) = \frac{5}{6} C_1 = \frac{5}{6}(3+3j) = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} j$$

- $H(200) = \left(1 - \frac{200}{600}\right) e^{-j0.02\pi 200} = \frac{2}{3} e^{-j4\pi}$, $C_2' = C_2 H(200) = C_2 \frac{2}{3} e^{-j4\pi} =$

$$= \frac{2}{3} C_2 (\cos(-4\pi) + jsen(-4\pi)) = \frac{2}{3} C_2 = \frac{2}{3}(2-j) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} j$$

- $H(300) = \left(1 - \frac{300}{600}\right) e^{-j0.02\pi 300} = \frac{1}{2} e^{-j6\pi}$, $C_3' = C_3 H(300) = C_3 \frac{1}{2} e^{-j6\pi} =$

$$= \frac{1}{2} C_3 (\cos(-6\pi) + jsen(-6\pi)) = \frac{1}{2} C_3 = \frac{1}{2}(0.5+j) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} j$$

- $H(400) = \left(1 - \frac{400}{600}\right) e^{-j0.02\pi 400} = \frac{1}{3} e^{-j8\pi}$, $C_4' = C_4 H(400) = C_4 \frac{1}{3} e^{-j8\pi} =$

$$= \frac{1}{3} C_4 (\cos(-8\pi) + jsen(-8\pi)) = \frac{1}{3} C_4 = \frac{1}{3}(0.2 - 0.2j) = \frac{1}{15} - \frac{1}{15} j$$

- $H(500) = \left(1 - \frac{500}{600}\right) e^{-j0.02\pi 500} = \frac{1}{6} e^{-j10\pi}$, $C_5' = C_5 H(500) = C_5 \frac{1}{6} e^{-j10\pi} =$

$$= \frac{1}{6} C_5 (\cos(-10\pi) + jsen(-10\pi)) = \frac{1}{6} C_5 = \frac{1}{6}(0.3j) = \frac{1}{20} j$$

- $H(600) = \left(1 - \frac{600}{600}\right) e^{-j0.02\pi 600} = 0$, $C_6' = C_6 H(600) = 0$

- Para calcular la señal resultante en el dominio del tiempo, usamos la ecuación:

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n' e^{jw_n t}}$$

Según la definición de la función de transferencia, sabemos que los $C_n' = 0$, para $|n| \geq 6$, ya que $H(f) = 0$ para las $|f| > 600Hz$, por lo que la ecuación se reduce a:

$$g(t) = \frac{1}{T} \sum_{-5}^{5} C_n' e^{jw_n t}$$

- Los C_n' negativos (desde –5 a –1) son los mismos que los C_n' positivos (desde el 1 hasta el 5) conjugados, es decir:

- $C_{-5}' = -\frac{1}{20} j$ • $C_{-4}' = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} j$ • $C_{-3}' = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} j$ • $C_{-2}' = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} j$ • $C_{-1}' = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} j$

- Voy a calcular ahora los ω_n para cada elemento del sumatorio:

- $\omega_0 = 0$
- $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.01} = 200\pi$ rad/s
- $\omega_2 = \frac{2\pi}{T}2 = \frac{4\pi}{0.01} = 400\pi$ rad/s
- $\omega_3 = \frac{2\pi}{T}3 = \frac{6\pi}{0.01} = 600\pi$ rad/s
- $\omega_4 = \frac{2\pi}{T}4 = \frac{8\pi}{0.01} = 800\pi$ rad/s
- $\omega_5 = \frac{2\pi}{T}5 = \frac{10\pi}{0.01} = 1000\pi$ rad/s

Los ω_n para los coeficientes negativos serían los mismos pero en otro cuadrante, es decir con la fase negativa:

La ecuación quedaría del siguiente modo:

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{T}\sum_{-5}^{5} C_n' e^{jw_n t} = \frac{1}{0.01}\left(C_{-5}' e^{-j1000\pi t} + \ldots + C_5' e^{j1000\pi t}\right)}$$

- En cuanto a las distorsiones que presenta la señal, para verlas debemos calcular el módulo (*distorsión de atenuación*) y la fase (*distorsión de retardo*).

$$H(f) = \left(1 - \frac{f}{600}\right)e^{-j0.02\pi f} = \left(1 - \frac{f}{600}\right)(\cos(-0.02\pi f) + jsen(-0.02\pi f)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(f)| = \sqrt{\left(1 - \frac{f}{600}\right)^2 (\cos^2(-0.02\pi f) + sen^2(-0.02\pi f))} = 1 - \frac{f}{600}$$

- Vemos que la función depende de f (no es cte) por lo que en cada valor de f la amplitud es diferente (siempre dentro de los valores de $|f| \leq 600$ porque para el resto es 0), por lo tanto hay distorsión de atenuación.

Ahora calculo la fase:

$$\phi(f) = arctg\left(\frac{-sen(-0.02\pi f)}{\cos(-0.02\pi f)}\right) = arctg(-tg(0.02\pi f)) = arctg(tg(-0.02\pi f)) = 0.02\pi f$$

Por lo que no hay distorsión de retardo ya que la fase es lineal.

b) Se podría transmitir por un medio de transmisión que se pudiera modelar mediante una red RC donde 1/RC=100π rad/s

No se trasmitiría correctamente ya que el ancho de banda del sistema es 100π y como hemos visto, los armónicos de la señal son de una frecuencia mayor.