Considerar una señal periódica (con periodo T=10ms) de la cual se conoce que contiene 6 armónicos dentro del ancho de banda con valores:

$C_0=5$; $C_1=3+3j$; $C_2=2-j$; $C_3=0.5+j$; $C_4=0.2-0.2j$; $C_5=0.3j$; $C_6=0.05$

Contestar a los apartados siguientes:

a) Esta señal se hace pasar por un medio de transmisión que tiene la siguiente función de transferencia

$$H(f) = \begin{cases} (1 - f/600)\, e^{-j0.02\pi f} & \text{si } |f| \leq 600\text{Hz} \\ 0 & \text{si } |f| > 600\text{Hz} \end{cases}$$

– Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la señal después de pasar por el sistema.

Primero paso los ms a segundos, así no tendré problemas al calcular la frecuencia.
$T=10$ ms $= 10 * 10^{-3} = 0.01$ seg.
Como ya tengo el periodo en segundos, se calcula fácilmente la frecuencia.
$f=1/T=1/0.01=100$ Hz.

De la función de transferencia dada sabemos lo siguiente,
$|H(f)| = (1-f/600)$ Esta parte se refiere al módulo.
$\theta(f) = -0.02\pi f$ Esta otra a la fase.

Ahora voy a calcular los módulos de los respectivos armónicos para no tener valores imaginarios.
$|C_0| = 5$
$|C_1| = \sqrt{3^2 + 3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$|C_2| = \sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$
$|C_3| =\sqrt{(1/2)^2+1}=\sqrt{(1/4)+1}=\sqrt{(5/4)}= \sqrt{5}/2$
$|C_4| =\sqrt{(1/5)^2+(1/5)^2}=\sqrt{(2/25)}=\sqrt{2}/5$
$|C_5| =\sqrt{(3/10)^2}=3/10$
$|C_6| =\sqrt{(1/20)^2}=1/20$

Ahora ya procedo a multiplicar cada armónico por la señal del sistema.
$|C_0^*| = |C_0| * |H(f)| = 5*(1-100/600)=5*(1-1/6)=5*(5/6)=25/6$ $|C_0^*| = 25/6$
$|C_1^*| = |C_1| * |H(f)| = 3\sqrt{2} * (5/6)=(5\sqrt{2})/2$ $|C_1^*| = (5\sqrt{2})/2$
$|C_2^*| = |C_2| * |H(f)| = \sqrt{5} * (5/6)=(5\sqrt{5})/6$ $|C_2^*| = (5\sqrt{5})/6$
$|C_3^*| = |C_3| * |H(f)| = \sqrt{5}/2 * (5/6)=(5\sqrt{5})/12$ $|C_3^*| = (5\sqrt{5})/12$
$|C_4^*| = |C_4| * |H(f)| = \sqrt{2}/5 * (5/6)=\sqrt{2}/6$ $|C_4^*| = \sqrt{2}/6$
$|C_5^*| = |C_5| * |H(f)| = 3/10 * (5/6)=1/4$ $|C_5^*| =1/4$
$|C_6^*| = |C_6| * |H(f)| = 1/20 * (5/6)=1/24$ $|C_6^*| = 1/24$

– Determinar la señal resultante en el dominio del tiempo.

La fórmula que voy a aplicar es la siguiente (se supone que el sumatorio será desde 0 hasta 6 que son los armónicos proporcionados)

$$y(t) = 1/T \sum |C_n^*|\, e^{-jwnt}$$

$w_n=2\pi fn$ (Así calculo la frecuencia para cada armónico)
$w_0=0$ $w_1=200\pi$ $w_2=400\pi$ $w_3=600\pi$ $w_4=800\pi$ $w_5=1000\pi$ $w_6=1200\pi$

$$y(t) = 100\ ((25/6)\ e^{(-2\pi)} + ((5\sqrt{2})/2)\ e^{(200\pi t - 2\pi)} + ((5\sqrt{5})/6)\ e^{(400\pi t - 2\pi)} + ((5\sqrt{5})/12)\ e^{(600\pi t - 2\pi)} + (\sqrt{2}/6)\ e^{(800\pi t - 2\pi)} + (1/4)\ e^{(1000\pi t - 2\pi)} + (1/24)\ e^{(1200\pi t - 2\pi)})$$

– ¿Qué tipos de distorsión se producen? Justificar la respuesta.

Se producen tanto la distorsión por atenuación ya que cada uno de los armónicos son modificados por la función de transferencia del sistema por el que pasa como una distorsión por retardo como se observa claramente en la señal resultante al pasar por el sistema.

b) Se podría transmitir por un medio de transmisión que se pudiera modelar mediante una red RC con $1/RC=100\pi$ rad/s.

$H(w) =1/(1+ wRCj)$ (Esta es la formula de transferencia de una Red RC)

Si $1/RC=100\pi$ rad/s entonces $RC=1/100\pi$ rad/s por tanto $H(w) =1/(1+ (wj)/ 100\pi)$

No entiendo muy bien este apartado, pero no creo que hubiera ningún problema para transmitir la señal ya que no hay ninguna asíntota que nos permita determinar que frecuencia o cuales no van a poder ser transmitidas. Así que en principio van a pasar todos los armónicos.

Como $w = 2\pi/T$ entonces $w=200\pi$.

La función de transferencia es $H(w) =1/(1+ (200\pi j)/ 100\pi)$ es decir $H(w) =1/(1+ 2j)$

$| H(w) | = 1/\sqrt{(1+2^2)}=1/\sqrt{5}$
$\theta(w) = -\pi/3$

$\lvert C_0^*\rvert = \lvert C_0\rvert * \lvert H(w)\rvert = 5*(1/\sqrt{5})=5/\sqrt{5}$	$\lvert C_0^*\rvert = 5/\sqrt{5}$
$\lvert C_1^*\rvert = \lvert C_1\rvert * \lvert H(w)\rvert = 3\sqrt{2} * (1/\sqrt{5})=(3\sqrt{2})/\sqrt{5}$	$\lvert C_1^*\rvert = (3\sqrt{2})/\sqrt{5}$
$\lvert C_2^*\rvert = \lvert C_2\rvert * \lvert H(w)\rvert = \sqrt{5} * (1/\sqrt{5})=1$	$\lvert C_2^*\rvert = 1$
$\lvert C_3^*\rvert = \lvert C_3\rvert * \lvert H(w)\rvert = \sqrt{5}/2 * (1/\sqrt{5})=1/2$	$\lvert C_3^*\rvert = 1/2$
$\lvert C_4^*\rvert = \lvert C_4\rvert * \lvert H(w)\rvert = \sqrt{2}/5 * (1/\sqrt{5})=\sqrt{2}/(5\sqrt{5})$	$\lvert C_4^*\rvert = \sqrt{2}/(5\sqrt{5})$
$\lvert C_5^*\rvert = \lvert C_5\rvert * \lvert H(w)\rvert = 3/10 * (1/\sqrt{5})= 3/(10\sqrt{5})$	$\lvert C_5^*\rvert =3/(10\sqrt{5})$
$\lvert C_6^*\rvert = \lvert C_6\rvert * \lvert H(w)\rvert = 1/20 * (1/\sqrt{5})= 1/(20\sqrt{5})$	$\lvert C_6^*\rvert = 1/(20\sqrt{5})$

$$y(t) = 100\ ((5/\sqrt{5})\ e^{(-\pi/3)} + ((3\sqrt{2})/\sqrt{52})\ e^{(200\pi t-\pi/3)} + 1e^{(400\pi t-\pi/3)} + (1/2)\ e^{(600\pi t-\pi/3)} + (\sqrt{2}/(5\sqrt{5}))\ e^{(800\pi t-\pi/3)} + (3/(10\sqrt{5}))\ e^{(1000\pi t-\pi/3)} + (1/(20\sqrt{5}))\ e^{(1200\pi t-\pi/3)})$$

En este caso se producirán nuevamente tanto una distorsión de atenuación como una distorsión por retardo.