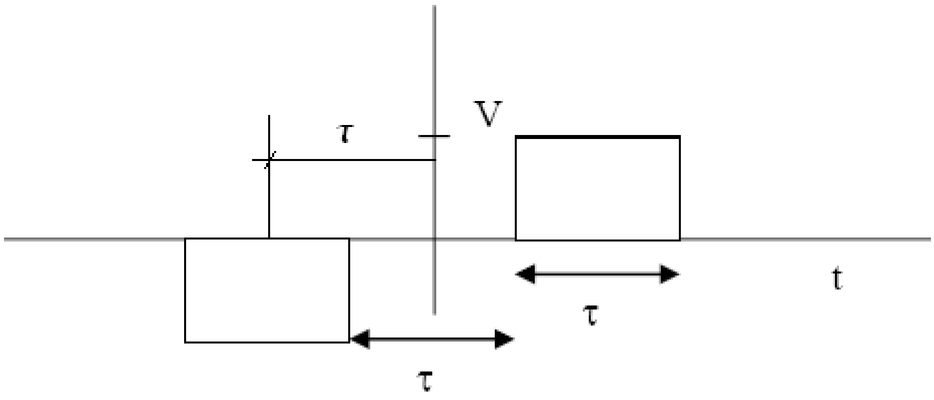
1) Calcular la integral de Fourier de la siguiente señal:



- Para calcularla uso las propiedades de linealidad y desplazamiento:

$$F(\omega) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t)e^{-j\omega t}dt = -F(\omega_1) + F(\omega_2)$$, siendo

$$F(\omega_1) = F(\omega)e^{-j\omega t}$$ y $$F(\omega_2) = F(\omega)e^{j\omega t}$$

(donde t es el desplazamiento, que es igual a τ)

- Como sabemos, la integral de Fourier de un pulso rectangular centrado en el origen es:

$$F(\omega_0) = \int_{-\tau}^{\tau} f(t)e^{-j\omega t}dt = v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2}$$, por lo que sustituyendo:

$$F(\omega) = -v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} e^{-j\omega\tau} + v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} e^{j\omega\tau} \Rightarrow$$

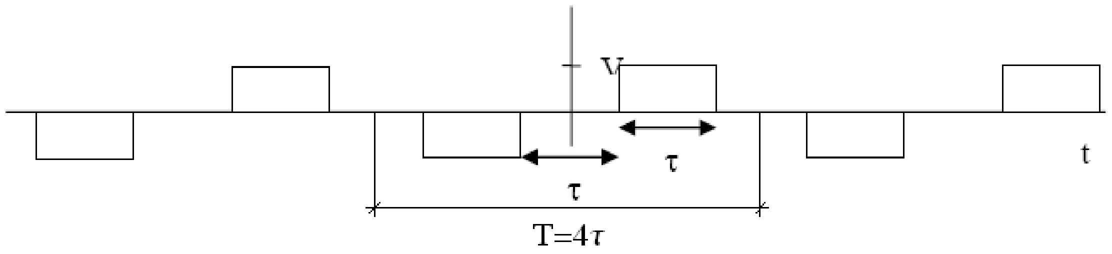
$$\Rightarrow F(\omega) = v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) \Rightarrow$$

(aquí utilizamos la fórmula: $e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} = 2jsen(\omega\tau)$)

$$\Rightarrow F(\omega) = v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2}(2jsen(\omega\tau)) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow F(\omega) = 2v\tau \frac{sen(\omega \tau/2)}{\omega \tau/2} sen(\omega\tau)\, j}$$

2) Utilizando los resultados anteriores calcular los coeficientes de la serie de Fourier de la siguiente señal periódica



- Sabemos que: $\omega_n = \frac{2\pi}{T} n = \frac{2\pi}{4\tau} n = \frac{\pi}{2\tau} n$, por lo que vamos a calcular los 6

primeros coeficientes de la serie de Fourier. Para ello sustituimos ω_n por el valor obtenido.

$$F(\omega_n) = 2v\tau \frac{sen(\omega_n \tau/2)}{\omega_n \tau/2} sen(\omega_n\tau)\, j \Rightarrow 2v\tau \frac{sen(\frac{\pi}{2\tau} n \tau/2)}{\frac{\pi}{2\tau} n \tau/2} sen(\frac{\pi}{2\tau} n\tau)\, j \Rightarrow$$

- Simplificando valores obtenemos una función que ya no depende de τ . Sólo depende de π y n .

$$\Rightarrow F(\omega_n) = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, n)}{\pi/4\, n} sen(\pi/2\, n)\, j$$

- Ahora vamos sustituyendo valores en n para calcular los coeficientes:

- $\omega_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4)}{\pi/4} sen(\pi/2)\, j = 8v\tau \frac{\sqrt{2}/2}{\pi} 1 j = 4v\tau \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, j$
- $\omega_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 2)}{\pi/4\, 2} sen(\pi/2\, 2)\, j = 4v\tau \frac{sen(\pi/2)}{\pi} sen(\pi)\, j = 4v\tau \frac{1}{\pi} 0\, j = 0$
- $\omega_3 = 3 \Rightarrow C_3 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 3)}{\pi/4\, 3} sen(\pi/2\, 3)\, j = 8v\tau \frac{sen(3/4\, \pi)}{3\pi} sen(3/2\, \pi)\, j = \frac{8}{3} v\tau \frac{\sqrt{2}/2}{\pi} (-1)\, j = -\frac{4}{3} v\tau \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, j$
- $\omega_4 = 4 \Rightarrow C_4 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 4)}{\pi/4\, 4} sen(\pi/2\, 4)\, j = 2v\tau \frac{sen(\pi)}{\pi} sen(2\pi)\, j = 2v\tau \frac{0}{\pi} 0\, j = 0$
- $\omega_5 = 5 \Rightarrow C_5 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 5)}{\pi/4\, 5} sen(\pi/2\, 5)\, j = 8v\tau \frac{sen(5/4\, \pi)}{5\pi} sen(5/2\, \pi)\, j = \frac{8}{5} v\tau \frac{-\sqrt{2}/2}{\pi} 1 j = -\frac{4}{5} v\tau \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, j$
- $\omega_6 = 6 \Rightarrow C_6 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 6)}{\pi/4\, 6} sen(\pi/2\, 6)\, j = 2v\tau \frac{sen(3/2\, \pi)}{\pi/2\, 3} sen(3\pi)\, j = \frac{4}{3} v\tau \frac{-1}{\pi} 0\, j = 0$
- $\omega_7 = 7 \Rightarrow C_7 = 2v\tau \frac{sen(\pi/4\, 7)}{\pi/4\, 7} sen(\pi/2\, 7)\, j = 8v\tau \frac{sen(7/4\, \pi)}{7\pi} sen(7\pi/2)\, j = \frac{8}{7} v\tau \frac{-\sqrt{2}/2}{\pi} (-1)\, j = \frac{4}{7} v\tau \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, j$

En resumen quedarían así los coeficientes:

$$
\left.
\begin{aligned}
C_1 &= 4v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
C_2 &= 0 \\
C_3 &= -\frac{4}{3}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
C_4 &= 0 \\
C_5 &= -\frac{4}{5}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
C_6 &= 0 \\
C_7 &= \frac{4}{7}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
C_8 &= 0 \\
C_9 &= \frac{4}{9}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
C_{10} &= 0 \\
C_{11} &= -\frac{4}{11}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j \\
&\;\vdots
\end{aligned}
\right\}
$$

Vemos que partiendo de C_1 se cumple que los pares valen 0 y los impares valen:

$$C_n = \pm\frac{4}{n}v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j\,,$$

siendo la serie 2 negativos, 2 positivos, 2 negativos, 2 positivos, etc

Para representarlos voy a llamar a la constante

$$\mu = 4v\tau\frac{\sqrt{2}}{\pi}j$$

$$C_1 = \mu \qquad C_3 = -\mu/3 \qquad C_5 = -\mu/5$$

- El espectro de la Frecuencia quedaría de la siguiente manera: