TEMA 2 - Señales y Sistemas

Señales y sistemas

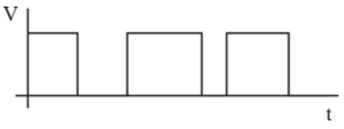
- Clasificación de las señales
- Estudio de las señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia
- Repaso a los números complejos
- Señales en el dominio de la frecuencia
  - Serie de Fourier
  - Integral de Fourier
- Señales a través de los sistemas lineales : respuesta en frecuencia
  - Sistemas lineales estacionarios
    - Función de transferencia
    - Teorema de la respuesta lineal
    - Propiedades de los sistemas lineales estacionarios
    - Importancia del análisis de Fourier
  - Estudio cualitativo y cuantitativo de la respuesta en frecuencia
  - Aplicación para redes ideales

Clasificación de las señales

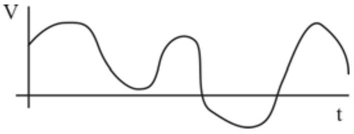
- Información codificada en mensajes
  - traducirla en señales para transmitirse por el medio físico
- Según su naturaleza, las señales se clasifican en
  - eléctricas (voltajes/intensidades)
  - electromagnéticas (ondas) utilizadas en radio, comunicación satélite, ...
  - ópticas (pulsos luminosos) utilizadas en fibra óptica
- La naturaleza de la señal depende del medio físico por el que se va a transmitir
  - Eléctricas-> cables conductores
  - Electromagnéticas –> medio libre, guias de onda
  - Ópticas -> fibra óptica
- Representación de las señales
  - función dependiente del tiempo que describen la variación de la variable física

Clasificación de las señales

- Según el número de valores que pueda tomar la función se clasifican
  - Señales digitales
    - Representadas por funciones que pueden tomar un número finito de valores
    - Ejemplo: señales binarias ("1" -> V voltios, "0" -> 0 voltios)

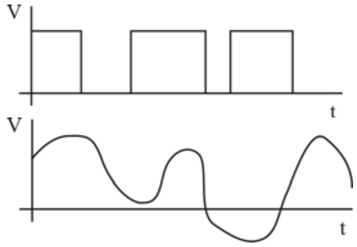


  - Señales analógicas
    - Representadas por funciones que pueden tomar un número infinito de valores
    - Ejemplo: señal telefónica

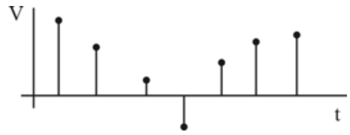


Clasificación de las señales

- Según los valores que pueda tomar el tiempo se clasifican en
  - Continuas - definidas para todos los valores de un intervalo tiempo



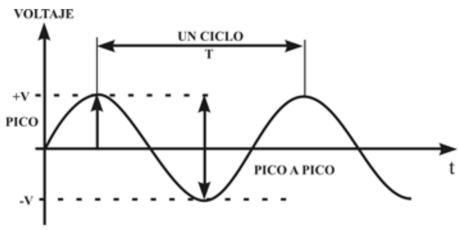
  - Discretas - definidas en ciertos instantes predeterminados de un intervalo de tiempo

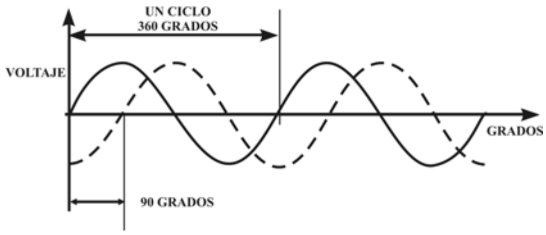


Clasificación de las señales

- Según que su forma de onda se repita o no a lo largo del tiempo se clasifican en
  - Periódicas caracterizadas por
    - la amplitud (A)
      - valor máximo que alcanza la señal (valores "pico" o "pico a pico")
    - el período (T)
      - tiempo transcurrido hasta que la forma de onda se vuelve a repetir (segundos)
    - la frecuencia (f=1/T)
      - número de formas de onda completas que atraviesan un punto de referencia en un segundo (Hz hercio)
      - Frecuencia angular ($\omega=2\pi/T$)
    - la fase
      - retardo o adelanto respecto de una señal de referencia (radianes)
  - No periódicas

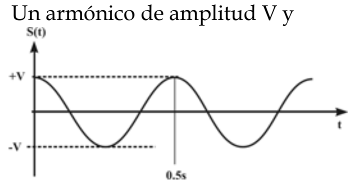
Clasificación de las señales



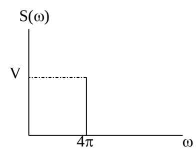


Estudio de señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia

- Dominio del tiempo
  - Variación de la señal según transcurre el tiempo
- Dominio de la frecuencia
  - Variación de la amplitud y la fase de la señal en función de la frecuencia
  - En este dominio se simplifica el estudio de la señal
- Ejemplo 1: $f(t)=V\cos(w_0 t)$
  - Un armónico de amplitud V y



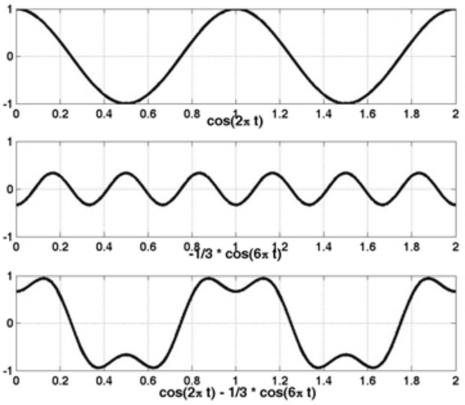
Dominio del tiempo



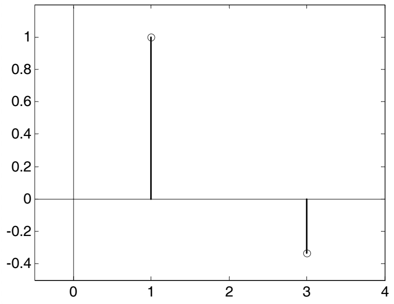
Dominio de la frecuencia

Estudio de señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia

- Ejemplo 2: $f(t)=A_1\cos(w_1 t) + A_2\cos(3w_1 t)$
  - Dos armónicos de amplitud $A_1=1$ y $A_2=-1/3$ y frecuencia w_1 y $3w_1$



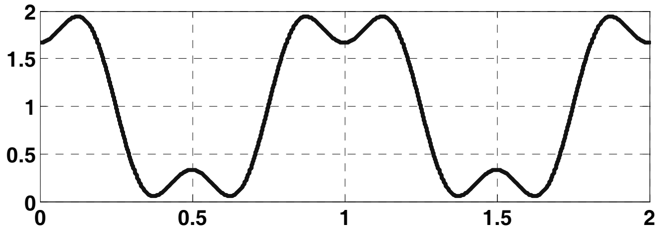
Dominio del tiempo

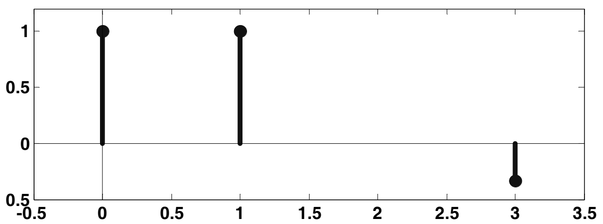


Dominio de la frecuencia

Estudio de señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia

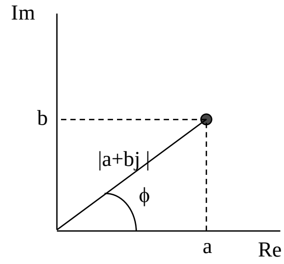
- Ejemplo 3: $f(t)= A+A_1\cos(w_1 t) + A_2\cos(3w_1 t)$
  - Tres armónicos de amplitud $A=1$, $A_1=1$ y $A_2=-1/3$ y frecuencia 0, w_1 y $3w_1$





Repaso a los números complejos

- Unidad imaginaria $j = \sqrt{-1}$
- Número complejo
  - a+bj
  - Parte real (a)
  - Parte imaginaria (b)



- Operaciones
  - (a+bj) + (c+dj) = (a+c) + (b+d)j
  - (a+bj) * (c+dj) = (a*c – b*d) + (bc+ad)j
- Representación en módulo y fase

$$|a+bj| = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\phi(a+bj) = \arctan(b/a)$$

  - a+bj = |a+bj| $e^{\phi j}$
  - $e^{\phi j}$ = cos(ϕ) + sin(ϕ) j

Señales en el dominio de la frecuencia: Serie de Fourier

- Consideraciones
  - A medida que aumenta la velocidad de variación de las señales, aumenta el contenido en frecuencia
  - Los ejemplos previos contienen funciones senoidales puras
    - ¿qué ocurre con una señal general, por ejemplo un tren de pulsos?
- Desarrollo en serie de Fourier
  - Sea f(t) una función continua y periódica de periodo T
  - f(t) se puede descomponer en una serie (suma infinita) de términos que son funciones senoidales puras (armónicos) cada uno con una amplitud y frecuencia diferente, de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\omega_n t + b_n sin\omega_n t\right) \qquad \text{siendo} \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

donde: $$a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega_n t)dt$$

$$b_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(\omega_n t)dt$$

Serie de Fourier

- Forma compleja del desarrollo en serie de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t} \qquad \text{siendo} \qquad c_n=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt$$

  - Relación con expresión previa

$$c_n \equiv a_n - jb_n = \sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}\, e^{j\theta_n} \quad \text{con} \quad |c_n| = \sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}$$

$$\angle c_n = \theta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

- Forma trigonométrica del desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}\cos(\omega_n t+\theta_n) = \frac{a_0}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\cos(\omega_n t+\theta_n)$$

$$\text{con} \quad \theta_n = arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

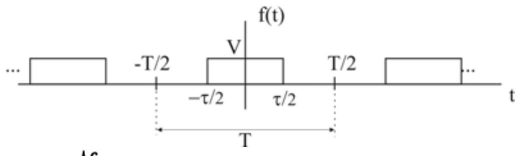
Serie de Fourier

- Espectro en amplitud
  - Diagrama donde se representa la amplitud de los armónicos frente a frecuencia $|c_n| = \sqrt{\left(a_n^2+b_n^2\right)}$
  - El cuadrado del espectro en amplitud es una medida de la potencia media disipada en una resistencia de 1Ω por las diferentes frecuencias
- Espectro en fase
  - Diagrama donde se representa la fase de los armónicos frente a frecuencia $\angle c_n = \theta_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$
- Espectro en frecuencia
  - Conjunto de información que proporciona el espectro en amplitud y fase
  - Si c_n es un número real puro positivo entonces espectro en amplitud coincide con el espectro en frecuencia $c_n = a_n$
  - Si c_n es un número imaginario puro entonces se puede representar ($j\, c_n$) frente a la frecuencia (espectro en amplitud) $c_n = -jb_n \Rightarrow jc_n = b_n$

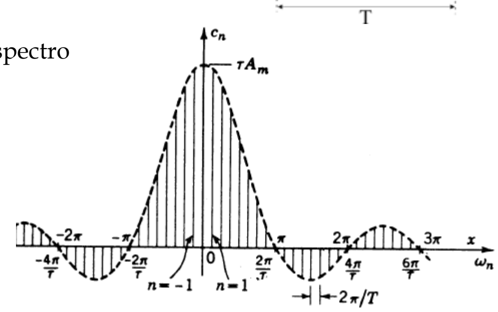
Serie de Fourier

- Ejemplo
  - Tren de pulsos rectangular de amplitud V, anchura τ y periodo T

Señal



Espectro



$$c_n = V\tau \frac{sin\left(\omega_n \tau/2\right)}{\omega_n \tau/2}$$

Cálculo de la serie de Fourier

$$c_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt = \int_{-T/2}^{-\tau/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt + \int_{-\tau/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt =$$

$$= \int_{-T/2}^{-\tau/2} 0\, e^{-j\omega_n t}dt + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V\, e^{-j\omega_n t}dt + \int_{-\tau/2}^{T/2} 0\, e^{-j\omega_n t}dt = 0 + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V\, e^{-j\omega_n t}dt + 0 =$$

$$= \left.\frac{Ve^{-j\omega_n t}}{-j\omega_n}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{Ve^{-j\omega_n \tau/2}}{-j\omega_n} - \frac{Ve^{-j\omega_n(-\tau/2)}}{-j\omega_n} = V\frac{e^{-j\omega_n \tau/2} - e^{j\omega_n \tau/2}}{-j\omega_n} =$$

$$= V\frac{e^{j\omega_n \tau/2} - e^{-j\omega_n \tau/2}}{j\omega_n} = V\frac{2j\sin(\omega_n \tau/2)}{j\omega_n} = V\tau\frac{2\sin(\omega_n \tau/2)}{\omega_n \tau} =$$

$$= V\tau\frac{\sin(\omega_n \tau/2)}{\omega_n \tau/2}$$

Serie de Fourier

- Ejemplo: tren de pulsos rectangular
  - Espectro discreto
  - Señal con infinitos armónicos cuya frecuencia es múltiplo de la frecuencia fundamental de la señal
  - La envolvente de los armónicos disminuye en valor absoluto para las altas frecuencias
  - Las componentes de mayor amplitud se concentran en el intervalo de las bajas frecuencias, luego la mayor parte de la energía asociada a la señal periódica se concentra en frecuencias bajas
  - Si el periodo disminuye (más pulsos por segundo) aumenta la separación entre los armónicos, luego las líneas se desplazan más lejos
    - se comprueba que una variación más rápida de la señal se corresponde con componentes de frecuencia superiores
    - al disminuir T la energía relativa de la señal contenida en el intervalo de frecuencias superiores se hace mayor
  - Si el periodo aumenta, la separación entre los armónicos disminuye, dando lugar a un espectro de componentes muy próximas y casi continuo

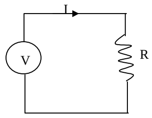
Serie de Fourier

- Ejemplo: tren de pulsos rectangular
  - Si el ancho del pulso disminuye, el contenido en frecuencia de la señal se extiende sobre un intervalo de frecuencia mayor
    - El primer cruce por cero se desplazaría a frecuencias superiores
    - Existe una relación inversa entre el ancho del pulso y la dispersión en frecuencia de los pulsos
  - Si $\tau << T$ (pulsos estrechos) la mayor parte de la potencia quedará incluida en el intervalo $0 < \omega_n < 2\pi/\tau$
    - Ancho de banda es el intervalo de frecuencia donde se concentra la mayor parte de la potencia de la señal
      - fuera de ese intervalo la potencia de la señal es despreciable
    - El primer cruce por cero se utiliza como una medida de la dispersión en frecuencia de las componentes de la señal
    - Ancho de banda de una señal es una medida de su dispersión en frecuencia
    - A.B no puede especificarse de forma única a no ser que sea una señal en banda limitada
    - Diferentes criterios para determinar el A.B

Serie de Fourier

- Consideraciones de potencia
  - Circuito de corriente continua

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = V^2 \; si \; \mathrm{R} = 1\Omega$$



  - Circuito de alterna con $V(t) = c\, e^{j\omega t}$
    - Potencia instantánea

$$P(t) = \left|V(t)\right|^2$$

    - Potencia media

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|V(t)\right|^2 dt = \left|c\right|^2$$

  - Circuito de alterna con $V(t) = \frac{1}{T}\left(c_1 e^{j\omega_1 t} + c_2 e^{j\omega_2 t}\right) siendo \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \text{ y } \omega_2 = \frac{2\pi}{T}2$

$$\overline{P} = \left|c_1\right|^2 + \left|c_2\right|^2$$

  - Circuito de alterna con *V(t)* una función periódica $V(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t}$

$$\overline{P} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$$

Teorema de Parserval para señales periódicas

Serie de Fourier

- Consideraciones de potencia
  - Teorema de Parserval para señales periódicas $\overline{P} = \sum_{n=\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2$
    - La potencia disipada cuando se aplica la señal a una resistencia de 1Ω se obtiene sumando la potencia disipada por cada una de las componentes de distinta frecuencia de la señal (armónicos)
    - Aplicación a un tren de pulsos rectangulares

$$\overline{P} = \sum_{n=\infty}^{\infty} (\tau V)^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_n \tau}{2}\right)}{\left(\frac{\omega_n \tau}{2}\right)^2}$$

    - La potencia del armónico de continua

$$(\tau V)^2$$

    - La potencia del primer armónico

$$\overline{P} = 2(\tau V)^2 \frac{\sin^2\left(\omega_1 \tau/2\right)}{\left(\omega_1 \tau/2\right)^2}$$

Serie de Fourier

- Impulso
  - Gran utilidad en comunicaciones y en estudio de los sistemas
  - Función δ
  - Impulso centrado en T δ(*t*-*T*)
    - Amplitud infinita , anchura nula y área unidad

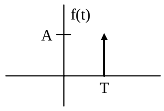
$$\delta(t-T)=\begin{cases}\infty & si \quad t=T\\ 0 & si \quad t\neq T\end{cases}$$

    - Definición

$$\int \delta(t-T)r(t)dt=r(T)$$

    - Representación

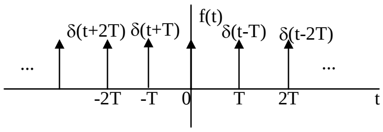
$$f(t)=A\delta(t-T)$$



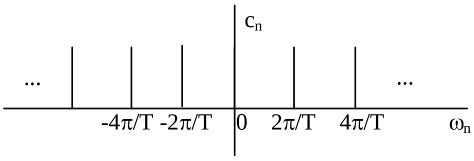
Serie de Fourier

- Tren de impulsos periódicos

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$



  - Representación en dominio frecuencia
    - Infinitas líneas de misma altura
    - Todos los armónicos contribuyen con de la misma forma al contenido energético de la señal
    - Ancho de banda tiende a infinito: coincide con criterio AB=1/τ



Integral de Fourier

- Señales no periódicas
  - En T.D no se utilizan las señales periódicas porque no llevan información
  - En T.D se utilizan las señales no periódicas
- Integral de Fourier
  - Se utiliza para extender la correspondencia tiempo-frecuencia a funciones no periódicas
  - Esto se logra de la siguiente forma
    - Cualquier función del tiempo que definida sobre un intervalo específico de tiempo T segundos se puede desarrollar en una serie de Fourier con periodo T
    - Se repite de forma artificial la función fuera del intervalo T
    - A medida que el intervalo aumente, el periodo aumenta
    - Si se aumenta el intervalo en el límite hasta infinito, la serie de Fourier resultante se transforma en la integral de Fourier

Integral de Fourier

- Sea *f(t)* una función periódica

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t} \quad \text{siendo} \quad c_n=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt \quad \text{y} \quad \omega_n=\frac{2\pi}{T}n$$

  - Como el incremento en frecuencia entre armónicos $\Delta\omega_n=\frac{2\pi}{T}$

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n$$

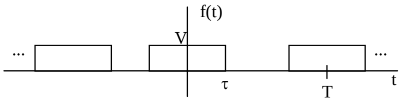
  - Cuando T→∞ se tiene

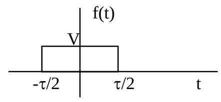
Señales periódicas		Señales no periódicas
$\Delta\omega_n=\frac{2\pi}{T}$		$\Delta\omega\to 0$
ω_n discreta	$T\to\infty$	ω continua
Espectro discreto	$\Longrightarrow$	Espectro continuo
$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_n t}$		$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
$c_n=\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_n t}dt$		$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

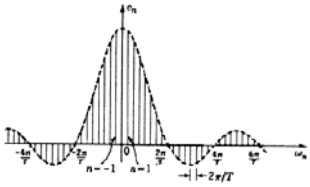
Integral de Fourier

- ❖ En general F(ω) es compleja $F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

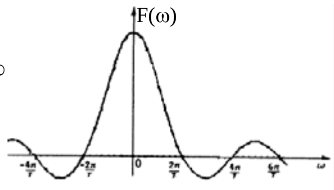
⌧ Ejemplo: Tren de pulsos rectangulares $\Longrightarrow$ Pulso rectangular
$T \to \infty$







$T \to \infty$
$\Longrightarrow$

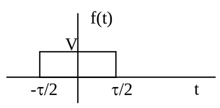


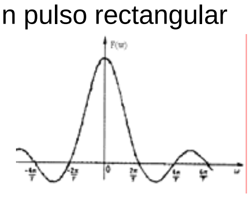
$$c_n = V\tau \frac{sin\left(\omega_n \tau/2\right)}{\omega_n \tau/2}$$

$$F(\omega) = V\tau \frac{sin\left(\omega \tau/2\right)}{\omega \tau/2}$$

Integral de Fourier

⌧ Ejemplo: Cálculo de F(ω) para un pulso rectangular





$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ve^{-j\omega t}dt=\frac{V}{-j\omega}\left[e^{-j\omega \tau/2}-e^{j\omega \tau/2}\right]=V\tau\frac{sin\left(\omega \tau/2\right)}{\omega \tau/2}$$

- ❖ Relación inversa entre el tiempo y la frecuencia
  - ◆ Si τ↓ ⇒ expansión espectral se incrementa de acuerdo con 1/τ
  - ◆ El ancho de banda medido hasta el primer cruce con cero es B=1/τ Hz

⌧ Transformada de Fourier de *f(t)* $\mathcal{F}\left[f(t)\right]$

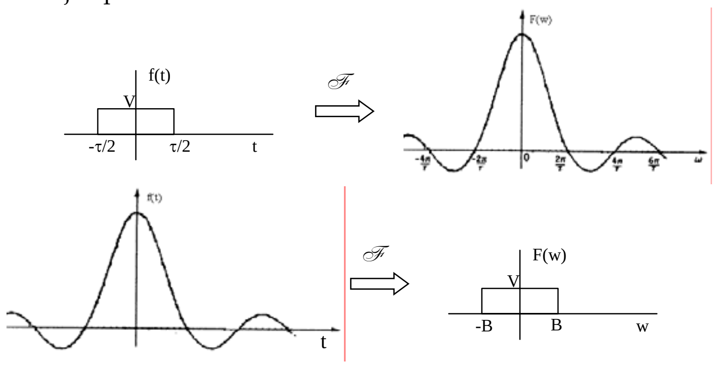
- ❖ Denominación dada a la integral de Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \qquad \mathcal{F}\left[f(t)\right]=F(\omega)$$

Integral de Fourier

- Existe una completa dualidad entre las dos integrales
  - Si se intercambian las funciones *f(t)* y *F(ω)* sus integrales también se intercambian
  - Ejemplo



Integral de Fourier: Propiedades

- Lineal

$$\left.\begin{array}{l} f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \\ f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \end{array}\right\} \Rightarrow af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

- Relación inversa entre el tiempo y la frecuencia

$$\text{Si } f(t) \leftrightarrow F(\omega) \text{ entonces } f\left(t/a\right) \leftrightarrow aF(a\omega)$$

- Componente de continua es el área bajo la curva que representa a la señal en el dominio del tiempo
  - Ejemplo: pulso rectangular con Area=Vτ y F(0)=Vτ
- La transformada de Fourier de una función par es una función real y par en el dominio de la frecuencia
  - Ejemplo: pulso rectangular
- La transformada de Fourier de una función impar es una función imaginaria e impar en el dominio de la frecuencia
  - Ejemplo: $f(t) = \begin{cases} e^{-at} & si \quad t \geq 0 \\ -e^{at} & si \quad t < 0 \end{cases}$

Integral de Fourier: Propiedades

- Simetría de los espectros de amplitud y fase

$$\text{Si } f(t) \in \Re \Rightarrow \begin{cases} |F(\omega)| & par \\ \theta(\omega) & impar \end{cases}$$

- Transformada de la derivada

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\frac{df}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega) \qquad \frac{d^n f}{d_n t} \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

- Transformada de la integral

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$\int f(t)dt \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

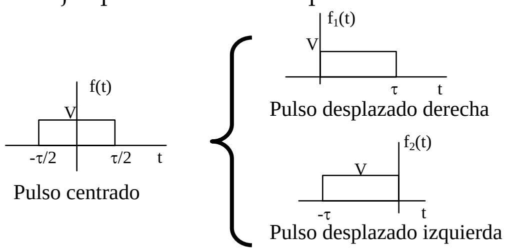
- Teorema de desplazamiento en el tiempo

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$f(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

Integral de Fourier: Propiedades

- Ejemplo: teorema de desplazamiento en tiempo



$$f_1(t) = f\left(t - \tau/2\right)$$

$$F_1(\omega) = F(\omega)e^{-j\omega\tau/2}$$

$$f_2(t) = f\left(t + \tau/2\right)$$

$$F_2(\omega) = F(\omega)e^{+j\omega\tau/2}$$

- Teorema de desplazamiento en frecuencia

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

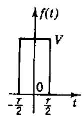
$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

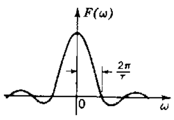
- Ejemplo: modulación

$$f_m(t) = f(t)\cos\omega_0 t = f(t)\left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) \Rightarrow F_m(\omega) = \frac{F(\omega-\omega_0)}{2} + \frac{F(\omega+\omega_0)}{2}$$

Integral de Fourier: Ejemplos

- Pulso rectangular

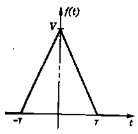


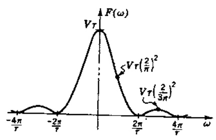


$$f(t)=\begin{cases} V & si \quad |t|\le \tau/2 \\ 0 & en \quad caso \quad contrario \end{cases}$$

$$F(\omega)=V\tau\,\frac{sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}$$

- Pulso triangular

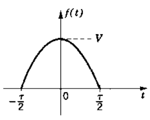


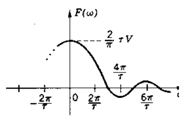


$$f(t)=\begin{cases} V\left(\frac{t}{\tau}+1\right) & si \quad -\tau\le t\le 0 \\ V\left(-\frac{t}{\tau}+1\right) & si \quad 0\le t\le \tau \end{cases}$$

$$F(\omega)=(V\tau)\left[\frac{sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}\right]^2$$

- Pulso cosenoidal



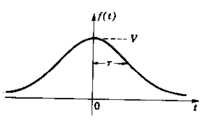


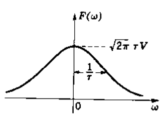
$$f(t)=\begin{cases} V\cos\frac{\pi t}{\tau} & si \quad |t|\le \tau/2 \\ 0 & en \quad caso \quad contrario \end{cases}$$

$$F(\omega)=\frac{2V\tau}{\pi}\left[\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1-(\omega\tau/\pi)^2}\right]$$

Integral de Fourier: Ejemplos

- Pulso gaussiano

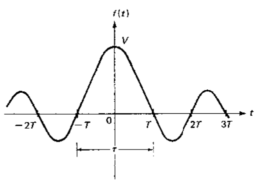


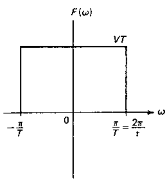


$$f(t)=Ve^{-t^2/2\tau^2}$$

$$F(\omega)=\sqrt{2\pi}V\tau e^{-\tau^2\omega^2/2}$$

- Pulso *(sin x) / x*





$$f(t)=V\,\frac{\text{sen}(\pi t/T)}{(\pi t/T)}$$

$$F(\omega)=\begin{cases} VT & si \quad |\omega|\le 2\pi/\tau \\ 0 & en \quad caso \quad contrario \end{cases}$$